



Arithmétique et Compréhension  
à l'École élémentaire

# DEROULEMENT TROISIEME TRIMESTRE

## Domaine Résolution de Problèmes

## Sommaire

	Pages
Module 3 : Phase 4 .....	3
Remarques sur le module 4 .....	8
Module 4 : Problèmes de transformation .....	11

ACE-ArithmEcole

## **Module 3 : Phase 4**

### **Séance 5 :**

On va ajouter encore les problèmes dans différents habillages (gâteaux).

Exemple de problèmes dans les différents habillages :

#### **Habillage collections (gâteaux)**

Type 1 :

*« Céline et Aurélien ont fait des gâteaux. Céline en a préparé 4. Céline et Aurélien mettent ensemble tous les gâteaux qu'ils ont préparés. Ensemble, ils ont préparé 42 gâteaux en tout. Combien de gâteaux a préparé Aurélien? »*

Type 2 :

*« Céline et Aurélien ont fait des gâteaux. Ils ont mis tous les gâteaux qu'ils ont préparés dans un même plat. Ensemble ils ont préparés 29 gâteaux. Céline en a préparé 26. [Version B : Céline reprend les 26 gâteaux qu'elle a préparés] Combien de gâteaux a préparé Aurélien? »*

#### **Exemple de progression séance 5 :**

Type 1 (4, 42) Gâteaux

Type 2 Version B (31, 28) Gâteaux

Type 1 (4, 17) Feutres

Type 2 Version B (41, 38) Feutres

Problème avec question sur le tout (32, 23) Euros

Type 2 Version B (41, 5) Euros

Type 2 Version B (45, 41) Euros

Type 1 (28, 26) Euros

Type 1 (16, 22) Euros

Problème avec question sur le tout (24, 13) Euros

**Remarque:** quand le problème s'y prête (la valeur de la partie manquante est peu importante), le professeur fera l'analogie entre la notion de partie manquante et la notion de différence, étudiée dans les problèmes de comparaison, de la façon indiquée précédemment.

### Séance 6 :

Pendant une séance, on va faire un entraînement ciblé sur les stratégies de comptage, passage à la dizaine (en avançant et en reculant) d'une part, et sauts par dix d'autre part.

Il va falloir essayer de suivre un personnage qui se déplace sur un parcours « à imaginer ». Le travail porte sur le calcul mental, on ne remplira pas ici de fiches-problème, certains élèves pourront s'aider d'une feuille et d'un crayon pour réussir leurs calculs (voir plus bas).

Le professeur peut assumer explicitement le fait que cette activité comporte un travail sur les stratégies de calcul. On ne va plus se demander si on pourrait faire autrement pour l'instant. On va calculer comme le professeur le demande.

Selon les besoins et les difficultés potentielles de sa classe le professeur pourra adapter cette séance en focalisant le travail sur l'une des stratégies :

#### Pour travailler sur la procédure « ajout » (en avançant)

##### - Sans passage à la dizaine

Il était à la case 32, puis quelqu'un l'a vu à la case 39. De combien de cases a-t-il avancé ?

##### - Avec passage à la dizaine

Il était à la case 34, puis quelqu'un l'a vu à la case 47. De combien de cases a-t-il avancé ?

34 -> 40 + 40->47

Autres exemples : (23, 32), (38, 46), (45, 53)...

Pour travailler sur la « procédure retrait » (en reculant)

- Sans passage à la dizaine

Il était à la case 48, puis on l'a vu reculer de 6 cases.

- Avec passage à la dizaine

Il était à la case 43, puis on l'a vu reculer de 7 cases.

$7 = 3 + 4$  (Il faut montrer le 3 dans 7).  $43 - 3 = 40$ .  $40 - 4 = 36$ .

Pour travailler sur les sauts par 10 en avançant ou en reculant

(Ce qui permet au professeur de changer de dizaine sur laquelle on travaille les passages).

Par exemple : la grenouille a sauté en avant/en arrière de 43.

Séance 7

On reprend les problèmes de parties-tout.

Par exemple :

Type 1 (7, 43) euros

Type 2, Version B (46,38) billes

Type 2 Version B (6, 38) pommes

Problème avec questions sur le tout (16, 12) euros

Type 1 (5, 52) euros

Type 2 Version B (35,28) billes

Type 2 Version B (57,48) trains

Type 1 (54, 58) billes

Problème avec questions sur le tout (23, 17) billes

Type 2 Version B (65,56) pommes

**Dernière phase [optionnelle]** Uniquement si le professeur a eu le sentiment dans les phases précédentes, que tous les élèves maîtrisaient l'équivalence dans tous les habillages, même avec des nombres « difficiles » et s'il reste suffisamment de temps pour travailler les modules suivants.

### Création d'énoncés

On donnera d'abord des exemples avec ces formulations simples.

Ensemble \_\_\_\_\_ et Charlie ont .... wagons en tout.  
\_\_\_\_\_ sait que ... wagons sont à lui.

Question : Combien \_\_\_\_\_ ?

\_\_\_\_\_ a .... wagons à lui/elle.  
Ensemble \_\_\_\_\_ et Charlie ont ... wagons en tout.

Question : Combien \_\_\_\_\_ ?

Ou avec des collections.

Ensemble \_\_\_\_\_ et Charlie ont .... pommes en tout.  
\_\_\_\_\_ sait que ... pommes sont à lui.

Question : Combien \_\_\_\_\_ ?

\_\_\_\_\_ a .... pommes à lui/elle.  
Ensemble \_\_\_\_\_ et Charlie ont ... pommes en tout.

Question : Combien \_\_\_\_\_ ?

<b>Module</b>	<b>Module 4 : Problèmes de Transformation</b>			
<b>Séances 6, réparties sur 4 semaines</b>	1	2	2	1
<b>Enjeux</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Utiliser la notion de différence acquise à partir des problèmes de comparaison et ceux de réunion de parties en un tout pour résoudre les problèmes plus difficiles de transformation où on a une situation initiale, un ajout et un retrait puis une situation finale</li> <li>➤ S'habituer à résoudre les problèmes en posant les opérations sous forme canonique pour préparer les élèves à poser les soustractions en colonne</li> <li>➤ Faire le lien avec les problèmes de comparaison et ceux de réunion de parties en un tout</li> <li>➤ Travailler la compréhension du problème</li> </ul>			
<b>Descriptif du module</b>	<p>On travaillera le recodage des problèmes en utilisant pour décrire les données et la question de chaque problème les termes génériques mis en place précédemment de quantité-partie, connue ou manquante et de quantité totale, connue ou à calculer.</p> <p>L'objectif est de permettre aux élèves de se rendre compte que les problèmes de transformation peuvent, en dépit de leur complexité sémantique due au fait qu'ils décrivent l'évolution temporelle d'une quantité, se ramener aux problèmes de combinaison où les relations entre les quantités sont des relations parties-tout.</p>			
<b>Journal du nombre</b>				
<b>Références aux programmes officiels</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Résoudre des problèmes simples à une opération</li> <li>- Résoudre des problèmes de la vie courante</li> <li>- Calculer mentalement des sommes et des différences</li> <li>- Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous</li> </ul>			

## Remarques sur le module 4

### **Remarque 1 :**

On a jusque-là systématiquement utilisé un schéma pour exprimer la structure du problème avant de faire le codage qui fait correspondre chaque quantité à un terme générique. Pour les problèmes de transformation nous opérerons différemment pour la raison suivante : dans les problèmes de combinaison et de comparaison on ne décrit que des états, on ne décrit pas des événements qui sont des transformations de ces états ; en conséquence, l'ordre dans lequel sont données les informations est indifférent et a peu d'incidence sur la construction du schéma. La seule chose qui change est que l'on représentera sur le schéma une quantité avant l'autre, mais cela n'a pas d'importance, car lorsqu'arrive la question, toutes les données figurent sur le schéma.

Dans les problèmes de transformation l'ordre de l'énoncé suit naturellement l'ordre temporel du déroulement des événements. Il peut arriver de ce fait que la quantité correspondant à la situation du début, l'état initial, soit inconnue et fasse l'objet de la question (*Paul avait des billes, son ami lui en donne 5, après il en a 8. Combien en avait-il avant ?*). Avec cet énoncé il est impossible de représenter cette information sur le schéma avant d'avoir fait l'analyse sémantique de l'ensemble de l'énoncé et déterminé le statut de chaque quantité. Il faut d'abord se demander quel est le statut de chaque quantité : est-ce une partie ou est-ce le tout ?

Dans les problèmes de combinaison et de transformation, le fait de faire figurer sur le schéma chaque information donnée successivement peut faciliter la compréhension, car cela aide à la mémorisation des informations précédentes. Ce n'est plus le cas dans les problèmes de transformation, où le schéma ne peut plus être construit pas à pas. Il faut donc commencer par le codage du problème et faire le schéma ensuite. Il ne sert pas à résoudre le problème, car une fois le codage du problème réalisé, on a toute l'information nécessaire pour choisir l'opération, mais il peut servir à faire prendre conscience du fait que les trois catégories de problèmes ont la même structure.



## Remarque 2

On a utilisé deux écritures, l'addition à trou et la soustraction, pour exprimer le calcul que l'on fait dans le cas de la procédure de calcul de la quantité manquante, ainsi que celui de la procédure de calcul du reste après retrait. Ces deux écritures désignent la même opération qu'on appelle l'opération de soustraction. Dans les deux cas on calcule une différence : la soustraction, c'est l'opération que l'on fait pour calculer une différence. Parler de « soustraction » pour désigner la procédure de calcul du reste après retrait est un abus de langage qu'il vaut mieux éviter pour aider les élèves à distinguer l'opération mathématique et la procédure de calcul.

Dorénavant on parlera de soustraction dans un sens plus abstrait qui est également celui de calcul de la différence que l'on a étudié dans les problèmes de comparaison, à savoir le calcul de la différence entre deux nombres. Il y a évidemment une analogie, ce sur quoi on a déjà insisté, entre d'une part la différence en plus et la différence en moins dans les problèmes de comparaison et dans les problèmes de combinaison (problèmes de réunion de parties en un tout ou de dissociation du tout en ses parties), le calcul de la quantité manquante et le calcul du reste après retrait. Le professeur continuera de le faire remarquer, quand il le jugera bon, selon le niveau de la classe, pour aider les élèves à prendre conscience que l'opération de soustraction prend différentes significations suivant les contextes où elle est utilisée (calcul de la différence entre deux nombres pour les problèmes de comparaison, calcul de la partie manquante ou calcul du reste après retrait dans les problèmes de réunion de parties en un tout) mais que c'est la même opération mathématique que l'on fait dans ces différents contextes.

Pour cette raison l'opération mathématique est plus abstraite que la signification qu'elle prend dans les problèmes qu'elle permet de résoudre : c'est quelque chose dont l'élève doit prendre conscience progressivement. C'est un apprentissage très difficile, c'est pour cela qu'il faut prendre garde à ne pas associer la notion de soustraction à quelque chose de trop spécifique, comme celle de perte, comme on le fait souvent.

Il en va de même de l'addition, qui n'a pas le même sens dans un problème de comparaison (calcul du nombre le plus grand à partir du plus petit et de la différence) et dans un problème de réunion de parties en un tout (calcul de la somme des parties), mais la différence frappe moins, parce qu'on utilise toujours la même procédure dans les deux cas : on fait une

somme, soit du petit nombre et de la différence, soit des valeurs des parties.

Pour aider les élèves à prendre conscience du degré de généralité de l'opération mathématique, dans ce module on ne résoudra plus les problèmes par calcul mental, on fera le calcul en utilisant une calculette, ce qui oblige à écrire l'opération sous sa forme canonique : ainsi dans le calcul d'une partie manquante, l'addition à trou sera proscrite, parce que l'on ne peut pas la poser sur la calculette et seule sera autorisée la soustraction. Cela est destiné à préparer les élèves à poser les opérations en colonnes, puisque dans le calcul d'une différence, l'opération est toujours posée sous la forme d'une soustraction. Ainsi on n'a plus à se poser la question de la procédure à utiliser en fonction de la taille des nombres, puisqu'on fait toujours la même chose en posant l'opération sur une calculette, comme on le fait dans le calcul des opérations une fois celles-ci posées en colonnes. Le professeur fera remarquer que c'est préférable de choisir entre des procédures quand on résout le problème par calcul mental, ce qui est le cas avec des petits nombres mais qu'avec des grands nombres on doit poser l'opération.

ACE-Arithmétique

## Module 4 : Problèmes de transformation

Les problèmes de transformation sont beaucoup plus difficiles à résoudre que ceux étudiés précédemment. En effet ce sont ceux où il y a le plus de distance entre les significations sémantiques liées au contexte du problème et les significations mathématiques. Ainsi considérons les deux problèmes suivants :

« Jacques a 25 billes au début de la récréation, il gagne 19 billes. Combien de billes a-t-il à la fin de la récréation ? »

« Jacques a perdu 19 billes à la récréation, à la fin il lui reste 25 billes. Combien de billes avait-il au début de la récréation ? »

Ces deux problèmes se résolvent de la même manière :

$25+19=44$  il a 44 billes après la récréation.

$19+25=44$  il avait 44 billes au début de la récréation.

On mesure les différences sémantiques que peut recouvrir la somme de deux nombres (qui expliquent la différence de difficulté entre ces problèmes). Pourtant dans la résolution d'un problème l'élève doit toujours avoir en tête la signification des nombres qui sont les opérands qu'il met dans les opérations et des nombres qui sont le résultat de ces opérations c'est-à-dire leur association avec les objets auxquels ils doivent être attribués. Un problème n'a plus aucun sens dès que cette association disparaît de l'esprit de l'élève et si cela se produit la résolution de problème devient un exercice néfaste.

Il faut donc prendre beaucoup de précautions pour que l'élève ne perde pas le sens qu'ont, dans le domaine du problème, les opérations faites pour le résoudre, sinon les calculs perdent aussi sens. Or c'est la résolution de problèmes qui doit permettre à l'élève de comprendre ce que signifient les opérations de calcul dans la réalité : ces significations sont multiples, comme on l'a vu, mais on ne peut esquiver cette difficulté, car il faut bien que l'élève comprenne qu'un même calcul peut correspondre à plusieurs types d'actions dans la réalité. Cela tient à ce que le calcul est quelque chose d'abstrait par rapport aux événements et actions du monde réel : c'est pour cela qu'il faut éviter que le calcul soit associé à une action privilégiée (par exemple, la soustraction à la perte et l'addition au gain).

Les problèmes de transformation requièrent souvent un recodage : pour les problèmes présentés plus haut, il faut se demander : *quand est-ce que Jacques avait le plus?* Il est évident que c'est à la fin de la récréation pour le premier problème, mais pour le second il faut un moment de réflexion pour comprendre que c'est au début de la récréation. Ces recodages sont faits soit à l'intérieur d'une catégorie de problèmes soit entre différentes catégories de problèmes soit en utilisant une autre comme on vient de le faire en traduisant un problème de transformation en problème de comparaison. Le recodage à l'intérieur d'une catégorie de problèmes est celui qui a été pratiqué dans le module précédent, où l'on a retraduit une procédure de calcul de la quantité manquante en calcul de reste, après retrait de la partie dont la valeur est connue. Les deux types de recodages seront utilisés pour les problèmes de transformation.

Nous nous fixons comme objectif pour le CP en ce qui concerne les problèmes de transformation de faire comprendre l'équivalence entre le calcul de la valeur du gain dans les problèmes où la transformation est un gain et le calcul de la valeur de la perte dans ceux où c'est une perte. Cela ressemble à ce qui a été fait avec les problèmes de réunion de parties en un tout, mais l'équivalence entre les procédures de calcul de la quantité manquante et de calcul du reste après retrait est beaucoup plus difficile à concevoir. En effet le problème « *Léo a 22 billes dans son sac. Pendant la récréation, il perd 17 billes. A la fin de la récréation, combien de billes Léo a-t-il dans son sac ?* » est facile à résoudre par la procédure calcul du reste après retrait de la partie connue : on enlève 17 de 22, il reste 4. Il est difficile à résoudre par la procédure calcul de la partie manquante : qu'est-ce qui manque à 17 pour aller jusqu'à 22. Cette procédure est difficile à concevoir, bien que facile à exécuter, car il faut aller de 17, les billes qu'on n'a plus, à 22 les billes qu'on avait avant. C'est un risque que l'on décide de ne pas courir, car il faut absolument éviter de donner l'impression qu'en mathématiques il faut imaginer des choses qui n'ont pas de sens, d'autant plus que l'option pédagogique est que c'est la résolution de problèmes qui donne du sens à la manipulation des nombres qu'on fait dans les calculs.

On prendra donc le parti, moins risqué, d'utiliser la notion de différence, acquise avec les problèmes de comparaison et de réunion de parties en un tout, pour repérer la partie gain et la partie perte en la distinguant du tout dont elle est une partie : le gain est une partie de ce qu'on a, la perte est une partie de ce qu'on avait. Pour cela on se référera à

la boîte en se demandant où il faut écrire les données qu'on a et où il faudra écrire le résultat. Cela revient à faire un recodage du problème de transformation en un problème de réunion de parties en un tout. Ensuite seulement on peut se poser la question de l'opération à faire. Il faut toujours commencer à rechercher les relations sémantiques entre les objets auxquels réfèrent les nombres avant de se demander quelle opération faire.

Ce sera l'occasion de faire un travail de compréhension de textes en profitant du fait que la lecture du problème requiert une compréhension approfondie de l'énoncé : identification des objets ou événements pertinents, identification de leurs relations sémantiques, identification des nombres de l'énoncé et des objets auxquels ils sont attribués, identification de l'objet auquel est associé le nombre à trouver, réflexion sur les relations entre les propriétés sémantiques des objets et les relations numériques entre les nombres dans les opérations : le nombre qui est une somme doit correspondre à l'objet qui réunit les objets du problème (un objet/état et un objet/événement qu'on peut considérer comme des parties), le nombre qui est une différence doit correspondre à un objet/événement qui est réuni avec un autre dans l'objet/état qui représente un tout. On insistera sur cette analyse quand on fait placer les nombres de l'énoncé dans les cases de la boîte.

### **Progression et déroulement des séances**

La première séance sera consacrée à des problèmes de calcul de la partie manquante quand cette partie est un ajout et quand elle est une perte. Le premier est un problème facile que nous avons étudié dans le module 1, le second est un problème difficile pour les élèves : ces problèmes se résolvent de la même façon et les schémas qui le décrivent sont rigoureusement identiques, comme nous le verrons. Le premier problème est facile parce que l'élève conçoit facilement qu'il faut ajouter à la quantité présente ce qui manque pour avoir la quantité finale et fait une addition à trou.

Le second est difficile parce qu'on donne la quantité de départ et la quantité restante et qu'on demande de calculer le montant de la perte et que de ce fait l'élève ne peut imaginer faire une addition à trou en partant de la valeur du reste et en comptant jusqu'à la quantité de départ, puisqu'il

s'agit d'une perte. Il ne peut pas non plus imaginer d'enlever le reste de la quantité de départ, puisque le reste n'a pas été perdu. Autrement dit, l'élève ne pense pas à ces opérations qui résolvent le problème parce qu'elles sont contradictoires avec la représentation qu'il se fait de l'action décrite dans le problème.

Il faudrait que l'élève conçoive une soustraction à trou (combien faut-il enlever de la quantité initiale pour avoir la quantité restante, par exemple :  $15 - ? = 7$ ), mais c'est une opération difficile à exécuter, à moins que la valeur à trouver soit très petite, de l'ordre de 2 ou 3. Il faut donc apprendre à l'élève à ne pas s'appuyer seulement sur la représentation de l'action décrite dans l'histoire pour résoudre le problème mais à faire un codage du problème, c'est-à-dire une description abstraite, qui lui permette de comprendre en quoi et pourquoi les deux problèmes se résolvent de la même façon.

L'élève n'a pas besoin de faire un codage abstrait du problème de calcul de la quantité manquante quand c'est un ajout : la représentation mentale de l'action suffit. Cependant on lui fera faire ce codage, pour lui montrer qu'il y a une autre façon de procéder pour résoudre le problème et que cette façon de faire lui sera utile pour résoudre l'autre problème. Quand la valeur de l'ajout et la valeur de la perte sont décrites de la même façon comme quantité manquante, le fait que ce soit un ajout ou une perte n'est pas pertinent : c'est ce qui fait que la description réalisée au moyen du codage est plus abstraite que celle engendrée par la représentation de l'action décrite dans l'histoire. Ce codage n'est pas naturel pour l'élève, c'est l'école qui doit le lui apprendre. L'objectif est de lui fournir un nouveau moyen de décrire le problème qu'il pourra utiliser quand la représentation du déroulement de l'action ne lui permet pas de trouver une solution.

## Séance 1

### **Problème de recherche de la valeur de l'ajout**

Le professeur propose d'abord un problème facile de recherche de la valeur de l'ajout :

« Léo a 47 billes dans son sac. Pendant la récréation, il gagne d'autres billes. A la fin de la récréation il a 72 billes, combien de billes Léo a-t-il gagnées. »

On identifie, comme on a appris à le faire, les quantités pertinentes du problème.

### Analyse du problème

- 47 : les billes de Léo avant la récréation
- 72 : les billes de Léo après la récréation
- Question : le nombre de billes gagnées

A ce stade le professeur peut demander aux élèves de trouver l'opération à faire mais sans donner le résultat. Cela a pour but de faire sentir la différence entre ce problème et le problème suivant de calcul de la partie manquante dans le cas de perte.

Le professeur prévient les élèves qu'on ne va pas faire tout de suite le schéma mais qu'on va d'abord chercher comment on peut appeler les trois quantités en utilisant les noms qu'on a déjà appris : quantité connue, quantité manquante, quantité totale. Il engage une discussion :

(i) « 47 : les billes de Léo avant la récréation, est-ce que c'est une partie des billes ou la quantité totale de billes ? Pourquoi c'est une partie ? Parce que les 47 billes de Léo avant la récréation sont une partie des 72 billes de Léo après la récréation. Est-ce que leur nombre est connu ? OUI, c'est 47. On écrit donc :

47 : les billes de Léo avant la récréation. → Quantité d'une partie connue

(ii) 72 : les billes de Léo après la récréation, est-ce que c'est une partie des billes ou la quantité totale de billes ? Pourquoi c'est la quantité totale ? Parce que c'est les billes de Léo avant la récréation et en plus les billes qu'il a gagnées pendant la récréation. Est-ce que leur nombre est connu ? OUI, c'est 72. On écrit donc :

72 : les billes de Léo après la récréation. → Quantité totale connue



(iii) question : le nombre de billes gagnées, est-ce que c'est une partie des billes ou toutes les billes ? Pourquoi c'est une partie ? Parce que les billes que Léo a gagnées pendant la récréation sont une partie des 72 billes de Léo après la récréation. Est-ce que leur nombre est connu ? Non. On écrit donc :

Question : nombre de billes gagnées. → Quantité manquante

**Remarque** : on peut écrire aussi quantité de la partie manquante, mais comme la quantité manquante est toujours la quantité d'une partie, on peut écrire simplement quantité manquante. En effet quand la question porte sur le tout, on écrit quantité totale à calculer.

On fait ensuite le schéma que l'on conservera pour le comparer avec le schéma du problème suivant et on remplit la boîte avec les données

### Résolution

Le professeur fait remarquer que la question porte sur le calcul de la partie manquante. Il fait écrire sur l'ardoise l'opération à faire dans ce cas. Il explique alors que comme les nombres sont grands on risque de se tromper en faisant du calcul mental. Il faudrait poser l'opération, mais comme on n'a pas appris à calculer les opérations, on va utiliser la calculette pour trouver le résultat. Il interroge les élèves pour savoir ce qu'il faut taper sur la calculette pour avoir le résultat. Il explique alors que désormais il ne faut plus écrire les différences sous forme d'addition à trou mais de soustraction. On tape sur la calculette comme on écrit une soustraction : on tape les données avec l'opération, puis « = » et on a le résultat. C'est pour cela qu'on ne peut pas faire d'addition à trou avec une calculette : parce que dans l'addition à trou le résultat est avant « = ».

On place le résultat dans la boîte.

On n'oublie pas de formuler le résultat : « Léo a gagné 25 billes pendant la récréation »



## **Problème de recherche de la valeur de la perte**

*« Paul a 52 billes dans son sac. Pendant la récréation, il perd des billes. A la fin de la récréation, il a 35 billes. Combien de billes Paul a-t-il perdu à la récréation ?*

On fait d'abord l'analyse du problème :

### **Analyse du problème**

52 : les billes de Paul avant la récréation

35 : les billes de Paul après la récréation

Question : le nombre de billes perdues

Le professeur demande alors aux élèves d'essayer de trouver l'opération qui permet de résoudre le problème et de la montrer sur leur ardoise. Il fait constater que ce problème est plus difficile que le premier et il dit : « On va voir maintenant comment on pourrait le résoudre en cherchant d'abord les noms qu'il faut donner aux trois quantités ». Le professeur fait cela sur le même modèle que précédemment :

(i) « 52: les billes de Paul avant la récréation, est-ce que c'est une partie des billes ou la quantité totale de billes ? Pourquoi c'est la quantité totale? Parce que dans les 52 billes qu'a Paul avant la récréation il y a les 35 billes qui restent à Paul après la récréation et les billes qu'il a perdues. Est-ce que le nombre des billes avant la récréation est connu ? OUI, c'est 52. On écrit donc :

52: les billes de Paul avant la récréation. → Quantité totale connue

(ii) 35 : les billes de Paul après la récréation, est-ce que c'est une partie des billes ou la quantité totale de billes ? Pourquoi c'est une partie? Parce que les billes qui restent à Paul après la récréation font partie des 52 qu'il avait avant la récréation. Est-ce que leur nombre est connu ? OUI, c'est 35. On écrit donc :

35: les billes de Paul après la récréation. →Quantité de la partie connue

(iii) question : nombre de billes perdues, est-ce que c'est une partie des billes ou toutes les billes ? Pourquoi c'est une partie ? Parce que les billes que Paul a perdues pendant la récréation sont une partie des 52 billes que Paul avait avant la récréation. Est-ce que leur nombre est connu ? Non. On écrit donc :

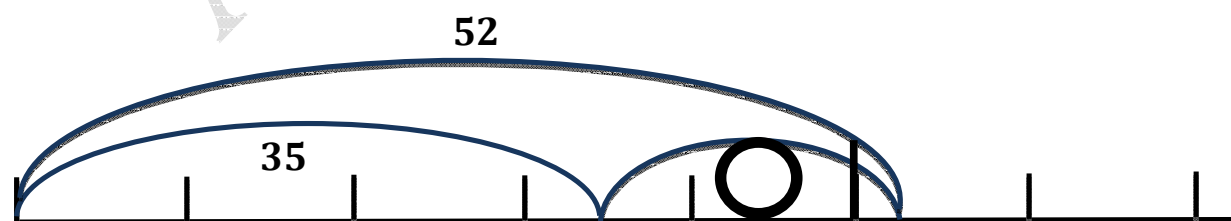
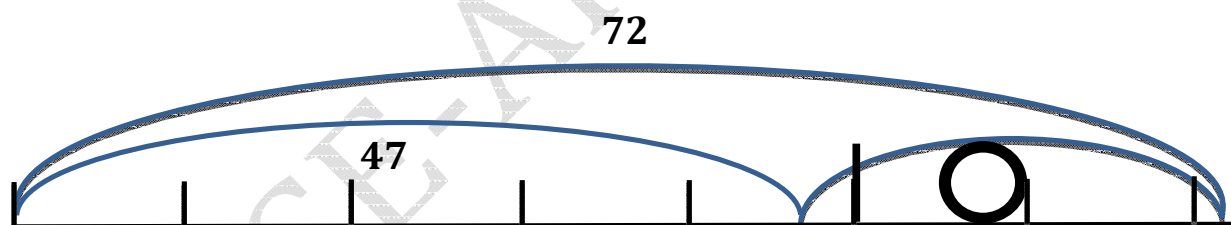
Question : le nombre de billes perdues. → Quantité manquante

On fait ensuite le schéma, puis on remplit la boîte avec les données.

Le professeur fait résoudre le problème comme précédemment en faisant remarquer que l'on recherche la quantité manquante et en interrogeant les élèves sur l'opération à faire quand on recherche la quantité manquante.

Il fait remarquer que ce problème se résout de la même façon que le précédent : on soustrait de la quantité totale la quantité connue.

Il dit « On va essayer de comprendre pourquoi ». Il fait constater que c'est le même schéma que pour le problème précédent (où les barres marquent les dizaines et les cinquantaines) et il fait chercher les correspondances entre les quantités :



Les 52 billes de Paul avant la récréation c'est comme les 72 billes de Léo après la récréation, c'est la quantité totale.

Les 35 billes qui restent à Paul après la récréation c'est comme les 47 billes que Léo a avant la récréation, c'est la quantité connue.

Ce qu'il faut chercher, les billes perdues par Paul c'est comme les billes gagnées par Léo, c'est la quantité manquante.

	Avant la récréation	Pendant la récréation	Après la récréation
Léo	47	billes gagnées	72
Paul	52	billes perdues	35

Pour calculer les billes gagnées par Léo, on a soustrait des 72 billes qu'il avait après (le total), les 47 billes qu'il avait avant (la partie connue).

Pour calculer les billes perdues par Paul on soustrait des 52 billes qu'il avait avant (le total), les 35 billes qui lui restent après (la partie connue).

On fait la même opération mais en sens inverse. C'est normal parce que perdre c'est l'inverse de gagner et donc la quantité totale c'est ce qu'il a au début et non à la fin comme dans le problème précédent.

Le professeur n'insiste pas et annonce qu'on va faire d'autres problèmes pour mieux comprendre. Les schémas doivent être conservés dans le cahier de calcul.

On termine la séance par un ou deux problèmes de perte selon le temps disponible, par exemple :

*« Cathy a 53 euros dans sa tirelire, elle a acheté une peluche. Après qu'elle a payé il lui reste 34 euros. Combien coûte la peluche ? »*

*« Maria a invité des camarades chez elle. Sa maman a apporté un panier où il y avait 42 pommes. Elle a donné une pomme à chacun des invités. Après il reste 29 pommes dans le panier. Combien y avait-il d'invités ? »*

## Séance 2

Nous allons maintenant étudier des problèmes où il convient toujours de rechercher la partie manquante mais où celle-ci est différente des problèmes précédents. Ce ne sont plus la valeur du gain ou de la perte, mais la quantité restante dans le cas d'une perte et la quantité initiale dans le cas d'un gain. Comme dans la séance précédente, un problème est très facile, le calcul du reste connaissant la quantité initiale et le montant de la perte et l'autre est difficile : c'est le cas du calcul de la quantité initiale connaissant la quantité gagnée et la quantité finale.

Le premier problème est facile parce qu'il suffit de mimer l'action décrite par le problème, du fait que la question porte sur l'état final. Le second est difficile, parce que pour donner un sens au problème, il faut remonter l'ordre temporel : il faut partir de la quantité finale et dissocier celle-ci en deux quantités, celle qui a été gagnée et celle qui était présente au début et qu'il faut chercher.

Comme précédemment on utilisera le problème facile pour faire prendre conscience du fait qu'il y a une autre façon de l'analyser que la simulation mentale de l'action et qu'on pourra utiliser cette façon de faire pour analyser le problème difficile.

### **Problème de recherche de la quantité restante dans un problème de perte**

*Jules a 65 billes dans son sac. A la récréation il perd 12 billes. Combien lui en reste-t-il ?*

#### **Analyse du problème**

65 : les billes de Jules avant la récréation

12 : les billes perdues à la récréation

Question : le nombre de billes qui restent après la récréation

Comme à la séance précédente, le professeur demande aux élèves de chercher l'opération à faire pour résoudre le problème et de la montrer sur

l'ardoise sans calculer le résultat. Comme précédemment également, il prévient les élèves qu'on ne va pas faire tout de suite le schéma mais qu'on va d'abord chercher comment on peut appeler les trois quantités.

Il engage la discussion avec les élèves pour identifier les trois quantités en laissant aux élèves l'initiative des questions à se poser pour savoir s'il s'agit d'une partie des objets ou de tous les objets :

(i) 65 : les billes de Jules avant la récréation → quantité totale

(ii) 12 : billes perdues à la récréation → quantité de la partie connue

(iii) Question : nombre de billes qui restent → quantité manquante

On fait ensuite le schéma que l'on conservera pour le comparer avec le schéma du problème suivant et on remplit la boîte avec les données.

### **Résolution**

Le professeur fait remarquer qu'il s'agit de trouver le nombre qui correspond à la partie manquante et que c'est pour cela que l'on fait une soustraction.

On n'oublie pas de formuler le résultat : « il reste à Jules 53 billes »

### **Problème de recherche de la quantité initiale dans un problème d'ajout**

*Ahmed a des billes dans son sac. Pour son anniversaire son ami lui a donné 13 billes. Après il a 61 billes dans son sac. Combien avait-il de billes avant son anniversaire ?*

### **Analyse du problème**

13 : billes reçues pour l'anniversaire

61 : nombre de billes après l'anniversaire

Question : nombre de billes d'Ahmed avant son anniversaire

Le professeur demande alors aux élèves d'essayer de trouver l'opération qui permet de résoudre le problème et de la montrer sur leur ardoise. Il fait constater que ce problème est plus difficile que le premier et il propose de chercher d'abord quel nom donner à chaque quantité et de le justifier :

(i) 13 : billes reçues pour l'anniversaire → quantité de la partie connue

(ii) 61 : nombre de billes après l'anniversaire → quantité totale

(iii) question : nombre de billes reçues en cadeau → quantité manquante

Le professeur fait faire ensuite le schéma, puis on remplit la boîte avec les données

### Résolution

Le professeur demande alors d'écrire sur l'ardoise l'opération à faire pour résoudre le problème. Il demande ce que l'on cherche, quelle opération permet de calculer la quantité manquante, rappelle que la quantité manquante est une partie et qu'on calcule toujours la partie manquante à l'aide d'une soustraction.

Le professeur explique alors que pour comprendre pourquoi il faut faire une soustraction, on va comparer les schémas des deux problèmes. Il met en regard les deux schémas comme dans la séance 1 et il fait chercher les correspondances entre les quantités :

Les 61 billes d'Ahmed après son anniversaire c'est comme les 65 billes de Jules avant la récréation, c'est la quantité totale.

Les 13 billes qu'Ahmed a reçues en cadeau à son anniversaire c'est comme les 12 billes perdues par Jules à la récréation, c'est la quantité de la partie connue.

Ce qu'il faut chercher, les billes qu'Ahmed avait au début, c'est comme les billes qui restent à Jules après la récréation, c'est la quantité manquante.

	Avant	Changement	Après
Jules	65 billes (total)	12 billes perdues	Combien de billes restantes ?
Ahmed	Combien de billes avant ?	13 billes en cadeau	61 billes (total)

Pour calculer combien de billes il reste à Jules on a soustrait des 65 billes qu'il avait avant (le total) les 12 billes perdues (la partie connue).

Pour calculer combien de billes avait Ahmed au début on soustrait des 61 billes qu'il a après (le total) les 13 billes reçues en cadeau (la partie connue)

On fait la même opération (quantité totale – quantité connue), ce qui change c'est que :

Après un changement en moins la quantité totale est au début et ce qu'il faut chercher à la fin

Après un changement en plus c'est le contraire : la quantité totale est à la fin et ce qu'il faut chercher au début

Ceci est un peu difficile à comprendre, mais c'est une première amorce qui pourra aiguïser la curiosité de certains élèves. Le professeur n'insistera pas, il propose de faire d'autres problèmes pour essayer de mieux comprendre. Il donnera des problèmes de gain avec recherche de la quantité initiale et pourra utiliser le contexte euros, le contexte fruits ou d'autres contextes de son choix.

Les schémas doivent être conservés dans le cahier de calcul.

Exemples de problèmes :

*« Léa a de l'argent dans sa tirelire. Pour son anniversaire elle reçoit 15 euros qu'elle met dans sa tirelire. Après elle compte son argent et trouve qu'elle 43 euros. Combien avait-elle avant son anniversaire ? »*

*« Dans la maison de Dora il y a des oranges dans le panier de fruits. Dora va*

*avec sa maman au supermarché et achète 15 oranges. En revenant elle les met dans le panier et compte toutes les oranges : il y en a 38. Combien y avait-il d'oranges avant d'aller au supermarché. »*

### Séance 3

Cette séance sera consacrée à une révision des quatre types de problèmes de calcul de la partie manquante étudiés dans les deux premières séances. Les élèves doivent comprendre que savoir reconnaître à laquelle des trois catégories génériques (quantité totale, quantité de la partie connue et quantité manquante) chaque quantité appartient suffit pour connaître l'opération à faire pour résoudre le problème. En effet pour les quatre types de problèmes il faut toujours calculer la partie manquante et pour cela soustraire de la quantité totale la quantité connue.

Il est proposé de faire cela en deux temps : le professeur revient d'abord sur quatre problèmes déjà résolus représentant chacun des types et pour chaque quantité fait reconnaître à quelle catégorie elle appartient, ce travail étant fait avec l'ensemble de la classe. Dans un second temps de nouveaux problèmes sont donnés, pour lesquels le codage en catégories est fait en petits groupes et suivi par une mise en commun sur l'ensemble de la classe.

#### **(i) Révision de problèmes résolus en séance 1 et 2**

Le professeur choisira 4 problèmes d'un même contexte (billes ou euros) représentant les quatre types de problèmes : question sur la transformation avec changement en plus et changement en moins, question sur la partie autre que la transformation avec changement en plus et changement en moins. Pour chaque problème :

- Il écrit l'énoncé
- Fait identifier les trois quantités dans les termes de l'énoncé comme dans l'analyse du problème
- Fait reconnaître à quelle catégorie générique appartient chaque quantité en faisant justifier
- Explique que parce qu'on recherche la quantité manquante on doit soustraire de la quantité totale la quantité connue



- Fait vérifier que la solution est correcte en faisant constater que la somme des deux parties est bien égale à la quantité totale.

## **(ii) Codage de nouveaux problèmes**

Le professeur utilisera les contextes de billes, euros, fruits ou d'autres contextes de son choix et construira une majorité de problèmes difficiles avec quelques problèmes faciles. Il constitue de petits groupes d'élèves, pas trop homogènes de préférence, qui doivent chacun faire une proposition de codage. Ces propositions sont discutées sous la conduite du professeur qui ensuite fait rechercher l'opération puis la solution et termine par la vérification

### Séance 4

La séance 4 sera consacrée aux deux problèmes de calcul de tout, le plus facile qui consiste à rechercher en situation d'ajout la quantité totale connaissant la quantité initiale et la valeur du gain, et le plus difficile qui consiste à calculer dans une situation de perte la quantité initiale connaissant la valeur de la perte et celle du reste.

#### **Problème de recherche de la quantité totale connaissant la quantité initiale et la valeur du gain**

*« John avait 24 petites voitures. Pour son anniversaire il en reçu 12 en cadeau. Combien en a-t-il après son anniversaire ? »*

#### **Analyse du problème**

24 : le nombre de petites voitures de John avant

12 : le nombre de petites voitures reçues en cadeau

Question : le nombre de petites voitures après l'anniversaire

Le professeur fait résoudre ce problème pour montrer qu'il est facile et demande de montrer l'opération à faire sur l'ardoise.

Il explique ensuite que l'on va chercher les noms des trois quantités

parce que cela aidera à résoudre un autre problème difficile. Il fait trouver les noms aux élèves

(i) 24 : le nombre de petites voitures de John avant : quantité connue d'une partie

(ii) 12 : le nombre de petites voitures reçues en cadeau : quantité connue d'une partie

(iii) question : le nombre de petites voitures après l'anniversaire : quantité totale à calculer.

On fait ensuite le schéma, puis on remplit la boîte avec les données.

### Résolution

Le professeur fait remarquer qu'on fait la somme de 24 et 12 pour trouver la quantité totale parce que les 12 voitures reçues en cadeau ont été ajoutées aux 24 que John avait déjà dans sa collection.

On n'oublie pas de formuler le résultat : « John a 36 voitures après son anniversaire ».

### **Problème de recherche de la quantité initiale connaissant la valeur de la perte et celle du reste**

*« Léa a une collection de petites peluches. Sa cousine vient la voir et les trouve jolies. Léa donne 8 de ses peluches à sa cousine. Il reste 32 peluches à Léa. Combien en avait-elle dans sa collection avant la visite de sa cousine ? »*

### Analyse du problème

8 : le nombre de peluches que Léa donne à sa cousine

32 : le nombre de peluches qui restent à Léa après le cadeau à sa cousine

Question : le nombre de peluches dans la collection de Léa au début

Afin de faire constater que ce problème est difficile, le professeur demande de chercher l'opération à faire pour résoudre le problème et de

l'écrire sur l'ardoise. Il dit alors « Comme ce problème est difficile, pour savoir quelle opération il faut faire, on va d'abord chercher à nommer les quantités, comme on l'a fait pour le premier problème.

(i) 8 : nombre de peluches que Léa donne à sa cousine. Est-ce que c'est une partie ou la quantité totale ? Ce ne peut pas être la quantité totale parce qu'il y a aussi les 32 peluches qui restent. C'est une partie, parce que les 8 peluches données à la cousine étaient dans la collection de Léa au début. Est-ce que cette quantité est connue ? Oui. On écrit donc : quantité d'une partie connue.

(ii) 32 : nombre de peluches qui restent à Léa après le cadeau fait à sa cousine. Est-ce que c'est une partie ou la quantité totale ? Ce n'est pas la quantité totale car il y a aussi les 8, c'est une partie parce que les 32 peluches qui restent à Léa faisaient partie de sa collection au début. Est-ce que cette quantité est connue ? Oui. Donc on écrit : quantité d'une partie connue.

(iii) question : nombre de peluches dans la collection de Léa au début. Est-ce que c'est une partie ou la quantité totale ? C'est la quantité totale, parce que toutes les peluches étaient dans la collection au début, les 8 qu'elle a données et les 32 qui lui restent.

On fait ensuite le schéma, puis on remplit la boîte avec les données.

### Résolution

Le professeur rappelle qu'on cherche la quantité totale, comme au premier problème, et qu'on fait donc la même opération, une addition :  $32+8=40$ . Il dit « On va essayer de comprendre pourquoi c'est la même opération que pour le premier problème. On va comparer les schémas des deux problèmes ».

Il met les deux schémas côte à côte et fait chercher les correspondances entre les quantités des deux problèmes :

Les 8 peluches que Léa a données c'est comme les 12 petites voitures que John a reçues : c'est la quantité d'une partie connue.

Les 32 peluches qui restent à Léa après son cadeau, c'est comme les 24

petites voitures que John avait avant son anniversaire : c'est la quantité d'une partie connue.

Les 40 peluches que Léa avait dans sa collection avant la visite de sa cousine, c'est comme les 36 voitures que John a après son anniversaire : c'est la quantité totale.

Ce qui change c'est que dans le premier problème la collection a été faite en mettant ensemble les voitures qu'avait John et celles qu'il a reçues en cadeau et que dans le second problème la collection a été séparée en deux parties : les 8 peluches données à la cousine et les 32 peluches qui restent dans la collection.

Dans le premier problème la collection complète est à la fin et dans le second problème la collection complète est au début. Mais cela ne change rien à l'opération : la collection complète c'est toujours la quantité totale. Pour les élèves qui ont des difficultés à comprendre, le professeur peut mimer les deux problèmes avec des jetons de deux couleurs en nommant les quantités par leur nom générique.

Les schémas doivent être conservés dans le cahier de calcul.

On termine la séance avec un problème de recherche de la quantité initiale connaissant la valeur de la perte et celle du reste, par exemple :

*« La maman de Julie a mis de l'argent dans son porte-monnaie pour faire ses courses. Au supermarché elle a payé 35 euros pour ses achats. Il lui reste 28 euros dans son porte-monnaie. Combien avait-elle dans son porte-monnaie en partant faire ses courses ? »*

## Séance 5

Au cours de cette séance seront proposés une majorité de problèmes de recherche de la quantité initiale connaissant la valeur de la perte et celle du reste et un ou deux problèmes de recherche de la quantité finale connaissant la quantité initiale et le gain. Le professeur choisira des contextes de jouets, d'euros, de fruits ou d'autres contextes de son choix.

## Séance 6



Cette séance sera une séance de révision au cours de laquelle professeur propose les six types de problèmes de transformation étudiés. La résolution de chaque problème pourra être faite en petits groupes et se terminera par une mise en commun. Le professeur n'exigera pas un schéma pour les problèmes difficiles, si le codage à l'aide des catégories génériques a été bien fait et a conduit au choix de la bonne opération. Si en revanche la solution est fautive, le schéma sera demandé et comparé au schéma du problème facile correspondant à retrouver dans le cahier de calculs.

Pour les problèmes faciles, le schéma ne sera plus exigé des élèves, mais ne sera pas non plus interdit à ceux qui souhaitent le faire. Pour les élèves faibles qui ont du mal à faire le codage générique, le schéma peut être utile car il peut être un support à la compréhension des problèmes faciles et il faut s'assurer que d'abord ils puissent comprendre les problèmes faciles.

Pour ces élèves il sera nécessaire de les prendre séparément en petit groupe pour expliciter les notions de tout et de partie, leur faire comprendre que non seulement un tout peut être construit en réunissant des parties mais aussi qu'un tout peut être dissocié en deux parties, autrement dit qu'un tout existe non seulement quand il est construit à la fin en réunissant deux parties, mais aussi qu'il existe quand il est dissocié en parties car ces parties sont les parties du tout qui existait avant d'être dissocié.

De même que les parties réunies en un tout continuent d'exister, parce qu'on peut virtuellement les séparer à nouveau, de même le tout qu'on a dissocié existe virtuellement car on peut virtuellement réunir les parties dissociées. Il faut penser qu'on peut défaire ce qu'on a fait pour pouvoir comprendre qu'il n'y a pas de différence du point de vue de l'opération mathématique entre un tout présent construit par la réunion de deux parties et un tout dissocié qui n'existe plus réellement mais qui existe virtuellement parce qu'on peut le reconstruire.

Ces notions sont difficiles, car elles requièrent le franchissement d'un seuil d'abstraction qui permet de considérer de façon équivalente le réel et le virtuel. Il faut sans doute prévoir un retour aux objets pour ces élèves, en utilisant des situations de manipulation mimant avec des objets (comme

des jetons de deux couleurs) la construction et la dissociation de tous, en vue de montrer que ces actions sont réversibles et que l'opération d'addition fait abstraction du fait que les parties et le tout existent réellement ou virtuellement.

C'est la même démarche que celle faite dans les séances précédentes pour montrer que l'opération de soustraction fait abstraction du fait que la partie manquante est un changement ou un état, précédant ou suivant le changement, et du fait que le changement est un gain ou une perte.

On ne peut pas espérer qu'à la fin du CP tous les élèves aient fait ce cheminement dans l'abstraction : le travail sera poursuivi au CE1 pour ceux qui ne l'ont pas fait. Il est essentiel en effet que les enfants parviennent à un niveau de raisonnement qui fasse abstraction du déroulement temporel des événements, et de la nature de ces événements, car la compréhension des opérations d'addition et de soustraction le requiert. C'est ce que l'on appelle dans les programmes l'acquisition du sens des opérations.

ACE-Arithm@cole