

## MODULE M@GISTERE « Journal du Nombre »

### PRESENTATION DU Journal

#### SOMMAIRE

1. La nature du Journal du Nombre.....	2
1.1 Écrire pour comprendre, pour soi-même et pour les autres .....	2
1.2 Écrire des mathématiques qu'on sait.....	2
1.3 Lorsqu'on écrit dans le Journal du Nombre, on réussit.....	2
1.4 Le Journal du Nombre n'est pas de la résolution de problème au sens habituel du terme .....	2
1.5 Le Journal du Nombre n'est pas un exerciceur .....	2
2. L'évaluation du Journal du Nombre.....	3
2.1 Le Journal du Nombre est systématiquement étudié par le professeur, mais il n'est pas évalué .....	3
2.2 Le Journal du Nombre ne sert pas d'abord comme un relevé des conceptions des élèves .....	3
3. Les fonctions du Journal du Nombre et le travail du professeur.....	3
3.1 La première fonction du Journal du Nombre : viser l'émancipation de l'activité productrice, en mathématique, de l'élève.....	3
3.2 La deuxième fonction du Journal du Nombre : la communication mathématique dans la classe. ....	3
3.3 Le travail du professeur : le choix des productions, l'incitation .....	4
4. Le Journal du Nombre et l'activité mathématique de la classe.....	6
5. <i>L'écrit</i> dans le Journal du nombre .....	6
6. La progression dans le Journal du nombre.....	7
7. La périodicité du Journal du nombre, la durée des séances .....	7
8. Le Journal du Nombre et la communication mathématique au-delà de la classe.....	7
9. Le Journal du Nombre et les élèves moins avancés .....	7

## 1. La nature du Journal du Nombre

### 1.1 *Écrire pour comprendre, pour soi-même et pour les autres*

Le petit texte suivant introduit le Journal du Nombre, et peut constituer sa raison d'être.  
« J'écris des mathématiques pour mieux comprendre les nombres et les signes mathématiques, pour mieux m'en servir, et pour que la classe comprenne mieux les nombres et les signes mathématiques, pour mieux s'en servir ».

### 1.2 *Écrire des mathématiques qu'on sait*

Dans le Journal du Nombre, l'élève est mis en position d'écrire des mathématiques, pour lui-même, et pour les autres élèves. Il se livre à une exploration des « potentialités » du nombre et des signes mathématiques. *Il enquête sur le nombre.*

Par exemple, un élève écrit « de son propre mouvement », à l'incitation du professeur qui dit aux élèves « d'écrire des mathématiques dans le Journal du Nombre », une égalité mathématique.

Il écrit  $3 + 1 = 4$ , ou bien il écrit  $\frac{1}{4} = 0,25$ .

Il écrit ainsi une égalité mathématique dont il est raisonnablement sûr, qu'il a certains moyens de prouver. Cette égalité peut être un point de départ pour en écrire d'autres.

C'est toujours l'élève qui choisit les nombres qu'il utilise dans le journal.

### 1.3 *Lorsqu'on écrit dans le Journal du Nombre, on réussit*

L'élève est mis en position de « réussite » au sens où il éprouve des potentialités des nombres et des signes, il se montre à lui-même et il montre aux autres des choses qu'il sait faire.

*Il est donc en principe impossible d'être « en difficulté »*, lorsqu'on travaille dans le Journal du Nombre, même si l'on peut bien entendu faire des erreurs.

Ainsi, le Journal prend en compte, sans modalités spécifiques, l'hétérogénéité des productions d'élèves : tous les élèves savent quelque chose.

### 1.4 *Le Journal du Nombre n'est pas de la résolution de problème au sens habituel du terme*

Le Journal du Nombre ne doit pas être conçu comme une sorte de présentation, à l'élève, par le professeur, d'un problème de mathématiques.

Dans le Journal du Nombre, insistons-y, l'élève *exprime ce qu'il sait faire*.

L'enquête, la recherche, le questionnement, prennent leur source dans ce point de départ, mais le Journal du Nombre *n'est pas* de la résolution de problème au sens habituel du terme, puisqu'il ne consiste pas à résoudre un problème posé par le professeur.

### 1.5 *Le Journal du Nombre n'est pas un exercice*

Les connaissances manifestées dans le Journal pourront donc être des connaissances personnelles, culturelles, en cours d'apprentissage. Elles résulteront pour beaucoup, grâce aux *incitations* du professeur, du travail accompli au sein des activités mathématiques de la classe.

Une question posée par un ou plusieurs élèves dans le cours normal de la classe peut donner lieu à une activité spécifique dans le Journal du Nombre, de même qu'un exercice ou un problème présent dans la vie de la classe. Mais attention, si un exercice ou un problème présent dans la vie de la classe devient un élément de travail dans le Journal du Nombre, c'est parce qu'il a été bien compris par tous les élèves, et qu'il peut servir de base à une étude accomplie par tous les élèves.

Par exemple, si des élèves ont bien compris le sens des symboles  $<$  et  $>$ , ils peuvent produire par eux-mêmes des écritures mathématiques dont ils sont raisonnablement sûrs. Des élèves de

CP peuvent alors produire par exemple une écriture comme «  $8 + 4 < 8 + 5$ , puisque  $4 < 5$  », tandis que des élèves de CM2 peuvent produire par exemple une écriture comme «  $34,72 < 34,8$ , puisque 3472 centièmes  $<$  3480 centièmes ».

Le Journal n'est donc pas un exercice, ni un instrument d'évaluation, mais plutôt le lieu d'une certaine forme d'expérience et d'interrogation du savoir mathématique par les élèves.

## 2. L'évaluation du Journal du Nombre

*2.1 Le Journal du Nombre est systématiquement étudié par le professeur, mais il n'est pas évalué*

Le Journal du Nombre est systématiquement lu par le professeur, éventuellement « commenté ». Il est donc étudié, mais il n'est pas « évalué ». Il s'agit d'une sorte de jeu sur les nombres, une sorte de « jeu de recherche » qui ne doit pas être « scolarisé ».

Par exemple, si un élève écrit «  $4 + 5 = 10$  » dans le Journal, le professeur lui signifiera que ce n'est pas une égalité correcte et pourra par exemple le faire réfléchir à partir de deux écritures qu'il lui fournira (par exemple  $4 + 1 = 5$ , et  $4 + 4 = 8$ ) afin que l'élève puisse modifier sa proposition. Il pourra également lui demander de représenter l'égalité sur la droite numérique. Selon le cas, ce travail pourra être adressé au collectif (sans mention de l'auteur de l'erreur), ou à l'élève lui-même. Si l'erreur commise lui paraît importante (si ce n'est pas une « étourderie »), le professeur peut en faire le point de départ d'un travail spécifique avec le ou les élèves concernés.

Au-delà d'éventuelles erreurs commises, le travail dans le Journal du Nombre doit pouvoir constituer le point de départ de discussions collectives, centrées sur *des écritures mathématiques pertinentes*, qu'on va décrire, sur lesquelles et à propos desquelles on va parler, en produisant peu à peu un langage mathématique adéquat pour cela.

*2.2 Le Journal du Nombre ne sert pas d'abord comme un relevé des conceptions des élèves*

Le Journal du Nombre peut constituer une « fenêtre » sur les conceptions, idées, procédures, erreurs, etc. des élèves, mais ce n'est pas sa fonction principale.

## 3. Les fonctions du Journal du Nombre et le travail du professeur

*3.1 La première fonction du Journal du Nombre : viser l'émancipation de l'activité productrice, en mathématiques, de l'élève.*

La fonction principale du Journal, indissociablement individuelle et collective, est donc bien de rendre les élèves capables de constituer, à partir des mathématiques qu'ils étudient en classe, un « rapport de première main » aux mathématiques, qui leur permette par exemple de travailler en autonomie, à partir d'incitations professorales ou non, à la production d'écritures mathématiques comme *faits mathématiques* (« trouvailles mathématiques »). L'élève n'est plus « consommateur » d'exercices ou problèmes fournis par le professeur, mais il est « producteur » de l'activité mathématique.

*3.2 La deuxième fonction du Journal du Nombre : la communication mathématique dans la classe.*

C'est le professeur qui organise cette communication. Cela peut se faire de la manière suivante.

*Le travail direct à partir de productions d'élèves*

- a) À la fin d'une séance sur le Journal du Nombre, le professeur ramasse les Journaux et étudie les productions d'élèves.
- b) Parmi ces productions, il en choisit une (éventuellement plusieurs) qui lui paraît manifester, par elle-même ou en relation avec d'autres, des propriétés mathématiques pertinentes.
- c) Il la présente à la classe, en coopération avec son auteur, comme *incitation* en début de la séance suivante. C'est une phase essentielle (cf. ci-dessous).
- d) Une fois qu'il s'est assuré que tous les élèves de la classe ont bien saisi « la nature » et la « logique » de la production, le professeur demande aux élèves d'« imiter » cette production.

*Le travail à partir d'un « jeu » dont les élèves sont familiers*

Lorsque les élèves ont pris l'habitude de travailler dans le Journal du Nombre, certaines familles d'activité peuvent être désignées sous forme de « jeux », et l'incitation pourra consister simplement à demander aux élèves de pratiquer un jeu d'une forme donnée. Par exemple, le « jeu des signes » peut consister à écrire des mathématiques avec tels ou tels signes ; le « jeu des représentations » peut consister à mettre en relation une écriture symbolique avec une représentation graphique de cette écriture (droite graduée, quadrillage, etc.) ; le « jeu de fabrication de problèmes » peut consister à inventer un énoncé de problème qu'on résout, etc.

*Le travail « libre »*

Lorsque les élèves disposent d'une expérience importante dans le Journal du Nombre, ils peuvent écrire librement, par exemple en explicitant des questions mathématiques qu'ils se posent, et en essayant d'y répondre.

*3.3 Le travail du professeur : le choix des productions, l'incitation*

Lorsque le professeur étudie les journaux du nombre produits par les élèves, il le fait avec l'idée de relever des productions qui expriment une propriété mathématique pertinente, afin de faire travailler cette propriété par l'ensemble de la classe.

\* *Par exemple (premier exemple)*, lors de la séance du Journal du Nombre dont le professeur a étudié les productions, l'incitation professorale était, au CP, « Écrire un nombre qu'on décompose sous la forme d'une addition ».

*Le choix de la production*

Le professeur a choisi une production dans laquelle l'élève a écrit systématiquement des doubles de la manière suivante :  $8 = 4 + 4$  ;  $10 = 5 + 5$  ;  $14 = 7 + 7$ . En lisant cette production, le professeur remarque d'une part l'emploi systématique des doubles (un élément essentiel au CP), et le placement du terme unique (ici 8, 10, 14) à gauche du signe « égal », en début d'égalité, ce qui peut favoriser une conception de l'égalité comme équivalence. Il choisit donc cette production.

*L'incitation et son appropriation par la classe*

Le professeur donne à la classe cette production, et demande aux élèves de l'étudier et de la commenter, en dialogue avec l'auteur. *Cette phase, l'étude et l'appropriation de l'incitation, est essentielle.* Elle doit amener tous les élèves, dans la discussion collective, à bien comprendre comment l'écriture mathématique a été produite, et quel est son sens. Le professeur peut d'ailleurs, « pour voir », demander à quelques élèves de venir au tableau pour produire des écritures de même type, qui sont discutées dans la classe, pour s'assurer qu'elles

relèvent bien du même type d'écriture. Après la reconnaissance du mode de production de l'écriture et de sa signification, une nouvelle séance du Journal du Nombre peut s'engager, avec *l'incitation* « Écrire des nombres sous la forme de doubles ». Il est aussi possible et fructueux, dans certains cas, de donner directement la production écrite ( $8 = 4 + 4$  ;  $10 = 5 + 5$  ;  $14 = 7 + 7$ ), avec l'incitation générique « J'observe et j'imité ».

Une incitation pourrait être ensuite, selon le moment de la progression, et en fonction des productions effectives des élèves : « écrire une égalité dans laquelle on fait voir un double dans un nombre », et on attend des élèves qu'ils écrivent par exemple  $15 = 6 + 6 + 3$ . L'incitation, toujours en fonction des mêmes critères peut devenir « écrire une égalité dans laquelle on fait voir le plus grand double possible dans un nombre », et on attend des élèves qu'ils écrivent par exemple  $15 = 7 + 7 + 1$ , etc. L'important, ici, n'est pas la résolution du problème « écrire une égalité dans laquelle on fait voir le plus grand double possible dans un nombre », mais le fait de comprendre rapidement ce « jeu d'écriture », et de se confronter *un grand nombre de fois* à ce jeu.

\* *Par exemple (deuxième exemple)*, lors de la séance du Journal du Nombre dont le professeur a étudié les productions, l'incitation professorale, au CE1, était « Écrire des soustractions ».

#### *Le choix de la production*

Le professeur regroupe alors des productions différentes d'élèves différents :  $52 - 47$  ;  $42 - 37$  ;  $12 - 7$ . Ces soustractions présentent la même différence, leur analyse peut donc favoriser l'appréhension de la soustraction conçue comme un écart entre deux nombres.

#### *L'incitation et son appropriation par la classe*

Le professeur demande à la classe d'étudier ces productions et de les commenter, en dialogue avec les auteurs. Après reconnaissance de la familiarité entre ces écritures (trois soustractions qui ont comme différence 5), une nouvelle séance du Journal du Nombre peut par exemple s'engager, avec *l'incitation* « écrire plusieurs soustractions qui ont la même différence ».

Une incitation pourrait être ensuite, selon le moment de la progression, et en fonction des productions effectives des élèves : « écrire plusieurs soustractions qui ont la même différence, supérieure à 10 ». L'incitation, toujours en fonction des mêmes critères, peut devenir dans une nouvelle phase « écrire plusieurs soustractions qui ont la même différence, supérieure à 50 », etc.

En fonction de leur niveau d'avancement mathématique, les élèves vont produire divers types de propositions, mais *aucun ne devra être dans l'impossibilité de travailler adéquatement*. Dans un second temps, le fait de rendre publiques certaines productions mathématiquement plus raffinées que d'autres, de les commenter et d'en comprendre finement la nature, permettra à chacun, dans l'étude et la compréhension de ces productions, de progresser.

\* *Par exemple (troisième exemple)*, lors de la séance du Journal du Nombre dont le professeur a étudié la production, l'incitation professorale, au CM2, était « Je choisis une fraction et je trouve plusieurs écritures mathématiques égales à cette fraction ».

#### *Le choix de la production*

Le professeur choisit la production  $350/8 = 43 + 6/8 = 42 + 14/8$ . Cette production est intéressante mathématiquement, en particulier parce qu'elle permet de construire des liens entre nombres entiers et fractions dans la décomposition/recomposition.

#### *L'incitation et son appropriation par la classe*

Le professeur demande à la classe d'étudier cette production et de la commenter, en dialogue avec son auteur, l'élève Y. Après reconnaissance des propriétés de cette écriture, une nouvelle séance du Journal du Nombre peut par exemple s'engager, avec *l'incitation* « fais comme Y ».

Une incitation pourrait être ensuite, selon le moment de la progression, et en fonction des productions effectives des élèves : « Je choisis une fraction et je trouve au moins trois écritures mathématiques égales à cette fraction, chacune comprenant toujours un nombre entier », etc.

#### **4. Le Journal du Nombre et l'activité mathématique de la classe**

Le Journal du Nombre doit pouvoir accueillir des *questions* ou *raisonnements* produits par les élèves, qu'ils aient eu lieu dans le Journal du Nombre, ou dans l'activité normale de la classe. Les élèves n'ayant pas toujours les moyens linguistiques et scripturaux de les poser, certaines séances du Journal du Nombre peuvent se centrer sur la discussion collective de productions, qui amènent à des questions ou hypothèses mathématiques.

Le Journal peut constituer ainsi un moyen de diffuser des raisonnements mathématiques énoncés par les élèves et pleinement compris de tous.

Par exemple, dans la discussion mathématique, les élèves peuvent être amenés à travailler sur certains éléments du « principe inverse », c'est-à-dire le fait que  $a - b + b = a$  (par exemple,  $8 - 3 + 3 = 8$ , ou bien  $247 + 98 - 98 = 247$ ), ou  $a \times b : b = a$  (par exemple  $7 \times 5 : 5 = 7$ , ou bien  $2400 \times 3 : 3 = 2400$ ). *Il n'est donc pas besoin de calculer* pour obtenir la solution de l'égalité, « il suffit de regarder », « ça saute aux yeux ».

Ce principe peut donner lieu à un « jeu » dans le Journal du Nombre, dénommé par les élèves, qui consiste donc à écrire des égalités qui « sautent aux yeux », fondées sur le principe inverse, ou sur d'autres éléments, à étudier et expliciter.

\* Certaines incitations peuvent être explicitement dévolues à un travail intégrant les systèmes de représentation (par exemple la demi-droite graduée) qui concrétisent les recherches.

L'incitation peut être alors par exemple : « Ecrire une égalité mathématique, puis la représenter sur la demi-droite graduée », ou bien « représenter une égalité sur la demi-droite graduée, puis l'écrire ».

Par exemple, au CP, les élèves montrent par le tracé de « ponts » sur la droite graduée de 1 en 1 que  $1 + 2 + 3 = 6$ .

Par exemple, au CM2, ils montrent, par le tracé de ponts sur la droite graduée adéquatement, que  $1/2 = 2/4 = 3/6$ .

#### **5. L'écrit dans le Journal du Nombre**

*Le passage à l'écrit* dans le Journal du Nombre est important en particulier parce qu'il permet un retour sur les écrits antérieurs des élèves.

De cette manière, l'élève peut prendre conscience de l'accroissement de ses connaissances, qu'il pourra justifier, *mais aussi de ce dont il pense être certain, sans laisser la responsabilité de la certitude uniquement au professeur.*

Le Journal est donc un outil pour la mémoire individuelle et collective, puisque la symbolisation et l'usage de représentations fixe momentanément ce que l'on pense « savoir » mais que l'on peut modifier.

L'écrit constitue le partage d'une expérience vécue d'abord individuellement puis collectivement.

## **6. La progression dans le Journal du Nombre**

La progression dans le Journal du Nombre est donc directement ancrée dans les productions des élèves, dans les idées mathématiques qu'elles révèlent, dont le professeur fait prendre conscience aux élèves, avant de demander à chacun de les travailler.

C'est par de nouvelles *incitations*, qui prennent leurs sources dans les propriétés mathématiques des productions antérieures, que le professeur fait mathématiquement avancer les élèves. Ces incitations sont fondées à la fois sur les productions relevées dans le Journal, et sur des discussions, dans la classe, fondées sur des productions ou des questions dont le professeur a relevé la pertinence.

## **7. La périodicité du Journal du Nombre, la durée des séances**

D'une part, le Journal du Nombre requiert une certaine quantité d'expériences mathématiques pour que l'élève soit en possibilité d'écrire des mathématiques « nouvelles » par rapport à ce qu'il sait déjà faire.

D'autre part, le Journal doit devenir une habitude, habitude de production et d'enquête, pour les élèves.

La périodicité des séances doit donc tenir compte de ces deux contraintes. Le rythme d'une ou deux fois par semaine, à la fin ou en début d'une séance, paraît pertinent.

La durée des séances peut être variable, selon le temps accordé à l'incitation. Mais elle doit être suffisante pour permettre à chaque élève de s'approprier individuellement l'incitation et de faire ses propres expériences, de s'inscrire dans *une enquête sur le nombre*.

Par ailleurs, des moments de retour décrochés des séances du Journal proprement dites, consacrés à l'analyse d'une ou plusieurs productions particulièrement intéressantes, paraissent indispensables.

## **8. Le Journal du Nombre et la communication mathématique au-delà de la classe**

Le travail accompli dans le Journal du Nombre peut être communiqué au-delà de la classe.

Les trouvailles des uns et des autres peuvent être partagées et servir d'incitations nouvelles dans les classes, qui peuvent sur cette base établir une correspondance scolaire.

## **9. Le Journal du Nombre et les élèves moins avancés**

Les élèves moins avancés doivent *nécessairement* travailler dans le Journal du Nombre, comme chaque élève.

Comme le travail dans le Journal du Nombre est un moment d'autonomie, chaque élève travaillant sans appui sur le professeur, celui-ci peut accorder une attention particulière, dans le travail du Journal, aux élèves moins avancés. Il peut alors « accompagner » ces élèves dans leur production, en s'assurant qu'ils ont bien saisi l'incitation, et en leur suggérant éventuellement certaines façons d'agir. Mais ces suggestions n'ont qu'un seul but : permettre à ces élèves moins avancés de travailler seuls, *avec une certaine intensité et une certaine densité mathématique*, sur *des productions de même type* (même si elles sont éventuellement moins nombreuses ou moins complexes) que celles des élèves plus avancés de la classe.